

Rapport de stage de DEA
Laboratoire de Physique des Océans
Université de Bretagne Occidentale

Simulation d'un équateur dans une cuve carrée

Pierrick Penven
Responsable de stage : Richard Schopp

Juin 97

Remerciements

Je remercie tout particulièrement Lionel Scoarnec, nous avons formé une équipe au service de la table durant ces 3 mois.

Je remercie Richard Schopp pour son aide, ses indications et surtout les discussions que nous avons pu avoir lors des expériences.

Je remercie Pierre Doare pour les photos et les conseils sur la vidéo.

Je remercie Sandrine Le Magoarou de m'avoir expliqué comment on rentre des figures sous LATEX et de m'avoir sauvé quand j'ai fait des bêtises avec l'ordinateur.

Je remercie Giberte Gouronnec pour son aide et sa disponibilité.

Je remercie tous ceux qui son venus faire un petit tour autour de la table.

Et en particulier les étudiants de géophysique pour leur café tard le soir.

Contents

1	Introduction	3
2	Théorie générale	4
2.1	Equation de vorticité	4
2.2	Vitesses verticales au fond	5
2.3	Vitesses verticales en surface	5
2.4	A l'intérieur	5
2.5	Scaling	6
2.6	Relation de vorticité intérieure	7
3	Première expérience: rôle de l'effet β	8
3.1	Description	8
3.2	Observations	9
3.3	Calcul des vitesses	10
3.4	Calcul de u_θ	12
3.5	Calcul de la vitesse moyenne de chaque jet	14
3.6	Application numérique et comparaison avec l'expérience	14
3.7	Problème des sources	16
3.7.1	Zone 1	16
3.7.2	Zone 2	17
3.7.3	zone 3	18
3.8	Le transport	18
3.9	Conclusion de la première manipulation	20
4	Deuxième expérience: le cylindre "équatorial"	21
4.1	Description	21
4.2	Observations	21
4.3	Analyse théorique	25
4.4	Analyse quantitative	26
4.4.1	Mesure indirecte de A_v	26
4.4.2	Calcul de l'extension de la tache de colorant	27
4.5	Etude de la couche limite sur le pourtour du cône	29
4.6	Conclusion de la deuxième manipulation	32
5	Troisième expérience: inversion de β et frontières	32
5.1	Description	32
5.2	Observations, comparaisons	35
5.2.1	Au niveau de la source	35

5.2.2	Résultats théoriques et mesures	35
5.2.3	Le long de la frontière	36
5.2.4	Sur le pourtour du cône	36
5.2.5	A l'extrémité de la frontière	37
5.2.6	Relation de dispersion	37
5.3	Type de couche limite le long de la frontière	38
5.4	Autour du puits	39
5.5	Conclusion de la troisième expérience	39
6	Dernière expérience: circulation entre 2 sphères concen-	
	triques avec frontières	40
6.1	Description	40
6.2	Comparaison avec les expériences en cuve plane	41
6.2.1	La source	41
6.2.2	Le bord Ouest	41
6.2.3	La zone équatoriale	43
6.2.4	Au bout de la frontière	43
6.3	Conclusion de l'expérience sphérique	44
7	Conclusion	44
8	Références bibliographiques	45

1 Introduction

Nous désirons comprendre le passage de l'équateur dans le cadre d'une circulation générale basse fréquence. Nous utiliserons pour cela un système expérimental formé de 2 sphères concentriques, fixes entre elles, en rotation sur un plateau tournant. R.Hide et I.Proudman [6] résolvent ce problème sans barrière méridienne jouant le rôle de continent. Une source et un puits de débits identiques sont placés l'une au pôle Nord, l'autre au pôle Sud. l'absence de barrière interdit les gradients de pression méridien. Toute la circulation Nord-Sud se fait par les couches d'Ekman. Le passage à l'équateur se fait au sein d'un cylindre vertical tangent à la sphère intérieure. Nous voulons savoir ce qu'il advient lorsqu'une barrière autorise les gradients de pression zonaux. Hors de la zone équatoriale, les expérience en cuve plane de H. Stommel, A.B. Arons et A.J. Faller [8] montrent l'existence d'un bord Ouest. Mais le problème du passage à l'équateur reste complexe. En effet, au niveau du cylindre décrit précédemment, l'épaisseur du fluide est doublée et l'effet β est inversé. Comme cela est signalé dans l'article de R.Schopp et A.Colin de Verdière [7] et décrit dans le dessin ci-dessous:

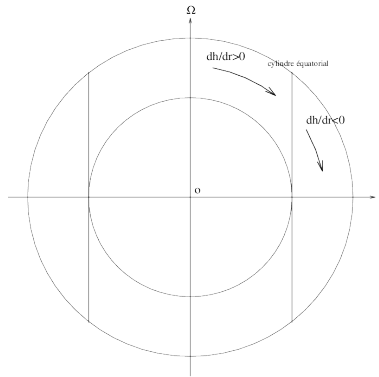


Figure 1: illustration de la variation de l'épaisseur pour la sphère

Nous avons voulu simuler ces phénomènes dans une cuve carrée; la visualisation et les interventions y étant plus faciles. La première expérience montre l'interaction entre une source ou un puits et un effet β dû seulement à la pente de la surface. dans la deuxième expérience, nous créons un saut et une inversion de β à l'aide d'un cône. Nous pourrions placer une barrière dans la troisième et comparer les résultats avec les manipulations effectués à l'aide d'une sphère. Les circulations que nous voulons observer nécessitent souvent des dynamiques différentes. Par exemple, la

zone entourant les sources implique des variations de vorticité relative issues de la théorie quasi-géostrophique, alors qu'à l'intérieur du fluide, la rotation rapide induit des mouvements par colonnes de Taylor et couches frictionnelles de fond ou de surface. Néanmoins, comme l'indique R.Hide [3], l'épaisseur du fluide entre les sphères n'est pas comparable à celle de l'océan mais plutôt à celle de l'atmosphère de planètes comme Jupiter. Certains processus pourraient tout de même être transposés de l'expérience à la terre.

2 Théorie générale

2.1 Equation de vorticité

Dans le cas le plus général pour un fluide en rotation, l'équation de vorticité s'écrit:

$$\frac{d\vec{\zeta}}{dt} = \vec{\zeta}_a \cdot \nabla \vec{u} - \vec{\zeta}_a \nabla \cdot \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P}{\rho^2} + \frac{\nabla \wedge \vec{F}}{\rho} \quad (1)$$

o $\vec{\zeta}_a = \vec{\zeta} + 2\Omega$ est la vorticité absolue et \vec{F} la force de friction.

Si le nombre de Rossby $\epsilon = \frac{U}{2\Omega L}$ est faible (par exemple dans la première expérience, $\epsilon \simeq 0.002$), ζ qui est d'ordre $\frac{U}{L}$ est négligeable devant Ω . De plus, l'eau étant considérée incompressible et homogène durant l'expérience, $\vec{\nabla} \rho$ et $\nabla \cdot \vec{u}$ sont nuls. Si le nombre de Rossby et les termes frictionnels (dans notre cas, les termes d'Ekman $E_v = \frac{A_v}{\Omega H^2} \simeq 0.00006$ et $E_h = \frac{A_h}{\Omega L^2} \simeq 0.00001$) sont faibles, c'est à dire hors des couches limites, la rotation prédomine et le fluide se bidimensionnalise (indépendance de z). L'équation de vorticité se résume à sa composante verticale:

$$\frac{d\zeta}{dt} = 2\Omega \frac{\partial w}{\partial z} + A_h \nabla^2 \zeta \quad (2)$$

Hors des couches limites frictionnelles, pour un faible nombre de Rossby, la vorticité ne change que forcée par:

- L'étirement des filaments de vortex
- L'effet souvent faible de la diffusion horizontale de vorticité

Ceci est la base de la théorie quasi-géostrophique. Cette équation est détaillée dans le livre de J.Pedlosky [4], Nous ne reprendrons ici que les grandes lignes

adaptées à notre problème. L'indépendance en z , nous permet d'intégrer (2) de la couche limite de fond ($z = h_B$) à la surface ($z = h_T$):

$$(h_T - h_B) \left(\frac{d\zeta}{dt} - A_h \nabla^2 \zeta \right) = 2\Omega (w(x, y, h_T) - w(x, y, h_B)) \quad (3)$$

o $w(x, y, h_B)$ et $w(x, y, h_T)$ représentent respectivement les vitesses verticales au fond et en surface.

2.2 Vitesses verticales au fond

2 phénomènes sont responsables de la vitesse verticale en haut de la couche limite de fond: la vitesse due à la pente (une particule fluide se déplaçant sur une pente avec une vitesse horizontale \vec{u} aura cinématiquement une vitesse verticale $= \vec{u} \cdot \nabla \vec{h}$) et le pompage créé au sommet de la couche d'Ekman (en $z' = \delta_e = \sqrt{\frac{A_v}{\Omega}}$ au dessus de la pente) par la divergence de l'écoulement en présence de frottement sur le fond:

$$w(x, y, h_B) = \vec{u} \cdot \nabla \vec{h}_B + \frac{\delta_e}{2} \zeta \quad (4)$$

2.3 Vitesses verticales en surface

La surface peut de plus tre mobile, sa pente est principalement due à la rotation. Il peut arriver que nous injections du fluide en surface à l'aide de sources ce qui entraîne des vitesses: w_p (en fait, dans la cuve carrée, le fluide ne sera pas injecté de cette faon)

Ainsi,

$$w(x, y, h_T) = \frac{dh_T}{dt} + w_p \quad (5)$$

o, $h_T = H_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + \eta$, H_0 étant l'épaisseur du fluide au centre de la cuve. Un calcul de conservation de volume permet de trouver H_0 en fonction de la profondeur du fluide H_d au repos: $H_0 = H_d - \frac{a^2 \Omega^2}{3g}$ o a est la moitié de la largeur de la cuve.

2.4 A l'intérieur

Nous pouvons réécrire l'équation de vorticité intégrée (3); en posant $h_T - h_B = H$, $H = H_0 \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2gH_0} + \frac{\eta}{H_0} - r \frac{\tan(\alpha)}{H_0} \right)$ (le fond est conique d'angle

α), nous obtenons,

$$\frac{H}{2\Omega} \left(\frac{d\zeta}{dt} - A_h \nabla^2 \zeta \right) = \frac{dH}{dt} + w_p - \frac{\delta_e}{2} \zeta \quad (6)$$

Nous ne nous intéresserons qu'aux circulations stationnaires, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\frac{d}{dt} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$. L'équation de vorticité intégrée hors des couches limites devient:

$$\frac{H_0}{2\Omega} \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2gH_0} + \frac{\eta}{H_0} - r \frac{\tan(\alpha)}{H_0} \right) \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \zeta)}_1 - \underbrace{A_h \nabla^2 \zeta}_2 = \underbrace{u_r \left(\frac{\Omega^2 r}{g} - \tan(\alpha) \right)}_3 - \underbrace{\frac{\delta_e}{2} \zeta}_4 + \underbrace{w_p}_5 \quad (7)$$

1 représente l'advection de vorticité, 2 la diffusion latérale (qui est souvent faible), 3 l'effet β (le déplacement radial dû à l'étirement des colonnes), 4 le pompage au sommet de la couche d'Ekman, 5 les éventuelle vitesses verticales injectées à la surface. Nous tacherons de garder cette numérotation dans la suite de l'exposé.

2.5 Scaling

Pour savoir quels termes garder dans les expériences futures, nous allons procéder à une adimensionnalisation. Nous poserons: $r^* = Lr$, $(u_r^*, u_\theta^*) = U(u_r, u_\theta)$, $\zeta^* = \frac{U}{L}\zeta$, $\eta^* = N_0\eta$, $w^* = \frac{HU}{L}w$. Les grandeurs portant des astérisques étant les valeurs dimensionnelles. Les variables adimensionnelles r , u , ζ et η sont d'ordre $O(1)$ et nous pouvons déterminer sans ambiguïté quel terme négliger.

- L est un rayon caractéristique, représentatif de ce que nous voulons comprendre, par exemple le rayon du cône: 0.2 m, ou la distance de la source au centre $d=0.24\text{m}$ (pour la première expérience o il n'y a pas de cône.)
- U , expérimentalement, est de l'ordre de 0,15 cm/s (si la vitesse verticale w_p est donnée par une source uniforme de rayon a et de débit S , alors $w^* = \frac{S}{\pi a^2}$. Or $w^* = \frac{HU}{L}w$. Pour la première expérience o $S = 2.762 \cdot 10^{-6} \text{m}^3/\text{s}$, $U \sim \frac{SL}{\pi a^2 H} \simeq 0.07 \text{cm}/\text{s}$. Ce qui est bien du mme ordre de grandeur que la valeur expérimentale.). On peut noter que U et ϵ dépendent linéairement du débit de la source.

- Au premier ordre, les équations du mouvement géostrophiques nous donnent N_0 : $2\vec{\Omega} \wedge \vec{u}^* = -g\nabla\vec{\eta}^*$ de manière adimensionnelle, $2\Omega U(\vec{k} \wedge \vec{u}) = -\frac{gN_0}{L}\nabla\vec{\eta}$ Comme ces 2 termes sont du mme ordre, $N_0 = \frac{2\Omega UL}{g}$

L'équation (7) devient:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{H_0}{2\Omega} \left(1 + \frac{\Omega^2 L^2}{2gH_0} r^2 + \frac{N_0}{H_0} \eta - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0} r \right) \left(\frac{U^2}{L^2} \vec{u} \cdot \nabla \zeta - \frac{A_h U}{L^3} \nabla^2 \zeta \right) \\ = \\ U u_r \left(\frac{\Omega^2 L}{g} r - \tan(\alpha) \right) - \frac{\delta_e U}{2L} \zeta + \frac{UH}{L} w_p \end{array} \right. \quad (8)$$

En faisant ressortir $\epsilon = \frac{U}{2\Omega L}$, $F = \frac{L^2}{R^2}$ (o $R = \frac{\sqrt{gH}}{2\Omega}$ le rayon externe de Rossby), et $R_e = \frac{UL}{A_h}$, (8) devient:

$$\epsilon \left(1 + \frac{F}{8} r^2 + \epsilon F \eta - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0} r \right) \left(\vec{u} \cdot \nabla \zeta - \frac{1}{R_e} \nabla^2 \zeta \right) = u_r \left(\frac{F}{4} r - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0} \right) - \frac{\delta_e}{2H_0} \zeta + w_p \quad (9)$$

2.6 Relation de vorticité intérieure

Hors des couches frictionnelles, pour $\epsilon \ll 1$, $F \sim 1$ et $\delta_e = \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}} \ll H_0$, (par exemple pour la première expérience, $\epsilon = 1.8 \cdot 10^{-3}$, $F = 0.5$ et $\frac{\delta_e}{H_0} = 5 \cdot 10^{-3}$). (9) se réduit aux termes 3 et 5: $u_r \left(\frac{F}{4} r - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0} \right) + w_p = 0$ Ce qui correspond à l'application du théorème de Taylor, Proudman, Poincaré: $w_z = 0$. De manière dimensionnelle,

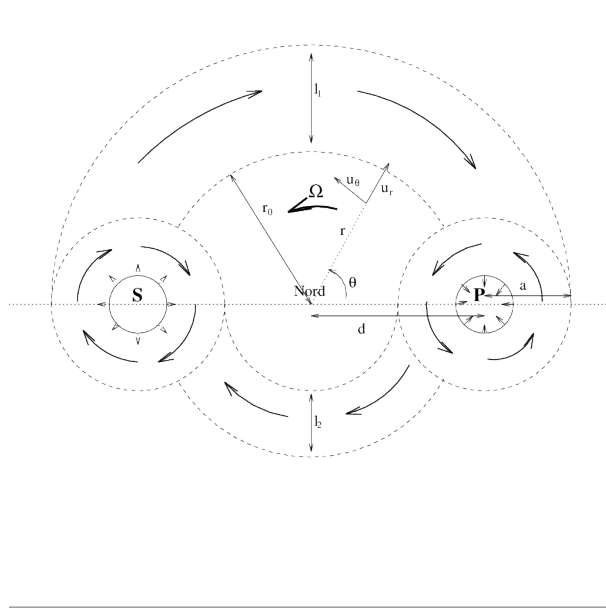
$$u_r^* \left(\tan(\alpha) - \frac{\Omega^2 r^*}{g} \right) = w_p^* \quad (10)$$

Ce qui correspond à une relation topographique de vorticité potentielle qui peut tre comparée à l'équation classique: $H^* \beta v^* = f w^*$. Dans notre cas, l'équivalent à β serait: $\beta_{topo} = \frac{2\Omega}{H^*} \left(\tan(\alpha) - \frac{\Omega^2 r^*}{g} \right)$. Si la pente de la surface dépasse à un moment donné celle du fond, il existe alors un rayon r o l'épaisseur du fluide passe par un minimum. C'est-à-dire o β s'inverse.

3 Première expérience: rôle de l'effet β

3.1 Description

Pour illustrer la relation décrite plus haut, on propose une première expérience: un puits et une source identiques équidistants au centre, posés sur un fond plat dans une cuve carrée en rotation. Le schéma de la figure (2) nous montre la disposition de la source et du puits dans la cuve.



Les différents paramètres sont: rotation: $\Omega = 1.715rad/s$, débit: $S = 2.762.10^{-6}m^3/s$, distance centre-sources: $d = 0.24m$, profondeur au départ: $H_d = 0.14m$ Nous pouvons situer la source (S) et le puits (P), les zones circulaires autour des sources o le terme dû à la pente de la surface (3) est supplanté par l'advection (1), la zone intérieur o la vorticité est constante et les vitesses sont zonales. Les 2 arcs de cercle connectés au puits et à la source représentent les 2 jet zonaux.

Figure 2: Schéma (vu du dessus de la cuve) de la première expérience.

R. Hide [2] a décrit une expérience similaire et donne une solution analytique pour un fond et une surface horizontaux. Mais il n'a pas prolongé son travail à un fond conique. A la fin de son article, l'auteur décrit cette expérience à titre d'exemple. La dynamique associée au fond conique/ surface plane est quasiment comparable à celle d'un fond plat/surface parabolique.

Cette dernière expérience ayant l'avantage d'être plus simple à réaliser.

Nous pouvons développer une circulation à caractère cylindrique dans une enceinte carrée car les caractéristiques $\frac{f}{H}$ sont les cercles à profondeur constante. Les courbes extérieures au cercle tangent à la cuve croisent les parois et ne peuvent pas soutenir de circulation. Donc si l'expérience se déroule hors des couches limites en $E^{\frac{1}{4}}$ décrites par H.Kuo et G. Veronis [9] et H.P. Greenspan [1], qui adaptent le fluide à la condition de non glissement le long du cylindre (fictif) inscrit à la cuve, nous pouvons considérer que la symétrie est bien circulaire. Dans ce cas, l'installation d'une cuve cylindrique n'est plus nécessaire.

3.2 Observations

Nous observons sur la figure (3), deux jets bien distincts formant deux demi-cercles. Un jet extérieur et plus large, qui va de la source au puits à

coller ici la photo

Figure 3: Les deux jets circulaires sont ici observables grâce au colorant.

la vitesse u_1 , et un autre jet intérieur et plus rapide, qui va du puits à la

source à la vitesse u_2 . Ils circulent tous les deux dans le mme sens: vers "l'Ouest".

Cette orientation Est/Ouest est fixée par le signe de β , le Nord étant l'endroit le moins profond ($\Omega > 0$, nous sommes dans l'hémisphère Nord). Dans cette expérience, c'est le centre de la cuve.

On peut penser que seul le bord Ouest des sources autorise des déplacements radiaux. En effet, ces mmes déplacements sur le bord Est deviendraient instables. Le mme critère que pour les continents peut s'appliquer. Les ondes de Rossby se propageant vers l'Ouest, on ne peut développer de gradient de pression sur le bord Est. Ce critère associé au cyclone et à l'anticyclone du puits et de la source, oriente totalement le problème. Par exemple une particule se situant dans la partie Ouest de l'anticyclone de la source va devoir se décrocher lorsqu'elle atteindra l'Est (c'est-à-dire à l'endroit le plus éloigné du centre de la cuve). A cet instant sa vitesse est orientée pleins Ouest, naturellement elle continue sa course au sein d'un jet extérieur circulant vers l'Ouest. Ce mme raisonnement peut tout aussi bien tre appliqué au puits, cette fois-ci, le jet sera intérieur.

Ce bord Ouest des sources peut tre mis en valeur par une inversion de β . En effet, si β change de signe, le bord Ouest change de coté. Nous avons vu précédemment que si la pente de la surface était à un moment donné supérieure à celle du cône, l'épaisseur du fluide passait par un minimum et β s'inversait. L'utilisation d'un grand cône et d'une rotation adéquate permettent d'avoir la profondeur minimum (c.a.d. la zone o β s'inverse) le long d'un cercle situé entre la source et le puits (sur la photo (4), le cercle bleu au milieu du cône). Dans cette expérience (voir figure (4)), l'Ouest est dans le sens positif à l'intérieur du cercle et de l'autre coté à l'extérieur. Nous constatons que les cotés Ouest sont privilégiés pour les déplacements radiaux. Donc, il existe bien un "bord Ouest des sources".

3.3 Calcul des vitesses

Au cours de cette section, pour simplifier les calculs, nous supposerons qu'une source (un puits) idéalisée en surface injecte (pompe) des vitesses verticales uniquement en surface. Ainsi nous resterons dans le cadre de la géostrophie.

Au niveau des sources, l'injection de fluide amène une extension des colonnes qui les oblige à se déplacer radialement. Sur un fond plat, l'équation (10) donne:

$$u_r = -\frac{w_p g}{\Omega^2 r} \quad (11)$$

coller ici la photo

Figure 4: Illustration du bord Ouest des sources: à l'extérieur du cercle il est à droite, à l'intérieur il permute, β ayant changé de signe.

(Jusqu'à la fin de la section, toutes les grandeurs sont dimensionnelles et nous ometterons les astérisques.)

w représente l'injection de la source en surface. Si on suppose w constant sur toute la surface de la source idéalisée (de rayon a), on peut poser $w_p = \frac{-S}{\pi a^2}$ si c'est une source et $w_p = \frac{S}{\pi a^2}$ si c'est un puits. Pour calculer les vitesses zonales, nous allons utiliser une méthode similaire à celle décrite dans la section 7.4 "Dipole circulation associated with isolated sources" du livre "Ocean Circulation Theory" de J.Pedlosky [5]. Pour calculer u_θ nous utilisons les équations du mouvement géostrophiques, cylindriques:

$$\begin{cases} -2\Omega u_\theta = -g \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ 2\Omega u_r = -\frac{g}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{cases} \quad (12)$$

Hors des sources, $u_r = 0$ donc $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$. Ceci indique que si les vitesses verticales sont nulles, c'est-à-dire à l'extérieure des zones sources, toutes les dérivées par rapport à θ sont nulles. La circulation est purement zonale et ne dépend pas de θ .

3.4 Calcul de u_θ

Contrairement à J.Pedlosky [5], nous n'avons pas de continent interdisant les gradients de pression sur le bord Est. C'est d'ailleurs pour cela que la circulation n'est pas dipolaire. Nous sommes obligés de fixer arbitrairement $\eta = \eta_0(r)$ en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (sur la figure (2), $\theta = 0$ au niveau du puits), (11) et (12) nous donnent:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{2w_p}{\Omega}$$

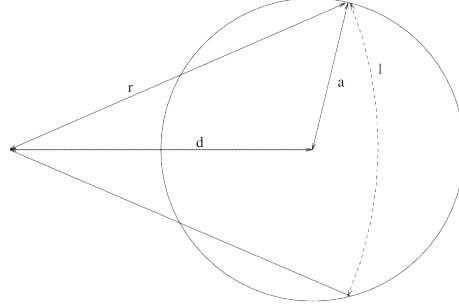
Ainsi en $\theta = +\frac{\pi}{2}$,

$$\eta(r, \frac{\pi}{2}) = \hat{\eta}(r) + \eta_0(r) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2w_p}{\Omega} d\theta + \eta_0(r) \quad (13)$$

Nous avons supposé w_p constant sur toute la surface de la source. Donc,

$\hat{\eta} = \frac{2I}{\Omega}$ avec,

$$I = \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} w_p r d\theta = \frac{l w_p}{r}$$



l est la longueur de l'arc de centre O et de rayon r coupant la source

Figure 5: Schéma explicatif de la longueur l .

où l est la longueur de l'arc de centre O et de rayon r coupant la source (ou le puits), comme l'indique la figure (5).

Un calcul géométrique nous donne l , qui vaut:

$$l = 2r \cos^{-1} \left(\frac{r^2 + d^2 - a^2}{2dr} \right) \quad (14)$$

et,

$$\eta \left(\frac{\pi}{2}, r \right) = \hat{\eta}(r) + \eta_0(r) = \frac{4w_p}{\Omega} \cos^{-1} \left(\frac{r^2 + d^2 - a^2}{2dr} \right) + \eta_0(r) \quad (15)$$

l nous conduit directement à η et les équations du mouvement géostrophique (12) permettent de calculer u_θ

$$u_\theta \left(\frac{\pi}{2}, r \right) = \hat{u}(r) + u_\theta \left(-\frac{\pi}{2}, r \right) \quad (16)$$

o,

$$\hat{u}(r) = \frac{w_p g}{d\Omega^2} \frac{d^2 - r^2 - a^2}{r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 + d^2 - a^2}{2dr} \right)^2}}$$

Pour respecter l'orientation vers l'Ouest décrite en 3.2, la vitesse arbitraire posée en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ peut tre choisie de telle sorte que toute la circulation ce fasse vers l'Ouest. Nous pouvons poser,

$$u_\theta \left(-\frac{\pi}{2}, r \right) = - \prod_{d-a}^{r_0} \hat{u}(r) \quad (17)$$

$\prod_{d-a}^{r_0}$ est une fonction porte qui vaut 1 pour r compris entre $d-a$ et r_0 .

r_0 étant la distance radiale où $\hat{u}(r)$ s'annule, distance que l'on peut immédiatement calculer:

$$\hat{u}(r_0) = 0 \rightarrow d^2 - r_0^2 - a^2 = 0$$

donc,

$$r_0 = \sqrt{d^2 - a^2} = 0.236m \quad (18)$$

(si $a=0.04m$).

Nous pouvons déterminer les largeurs l_1 et l_2 des deux jets:

$$l_1 = d + a - r_0 = 0.043m$$

$$l_2 = r_0 - d + a = 0.036m$$

Les vitesses calculées qui sont représentées sur les courbes (6), ont des valeurs très élevées au bord des jets. Ceci serait dû à la distribution homogène de w_p qui n'est pas réaliste et aux couches de mélanges non prises en compte. Toutefois, nous pouvons vérifier si les moyennes au sein de chaque jet correspondent aux vitesses mesurées. En effet, ce sont bien ces valeurs qui sont observables en suivant le colorant.

3.5 Calcul de la vitesse moyenne de chaque jet

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1,2} &= \frac{1}{l_{1,2}} \int_{l_{1,2}} u_\theta(r) dr \\ &= \frac{g}{2\Omega l_{1,2}} \int_{l_{1,2}} \frac{\partial \eta}{\partial r} dr \\ &= \pm \frac{g}{2\Omega l_{1,2}} [\eta]_{(d+a), (d-a)}^{r_0} \end{aligned} \quad (19)$$

Ainsi,

$$|\bar{u}_{1,2}| = \frac{g}{2\Omega l_{1,2}} \eta(r_0) \quad (20)$$

3.6 Application numérique et comparaison avec l'expérience

En introduisant les valeurs caractéristiques de l'expérience, nous obtenons:

- $\bar{u}_1 = 1.42$ cm/s
- $\bar{u}_2 = 1.68$ cm/s

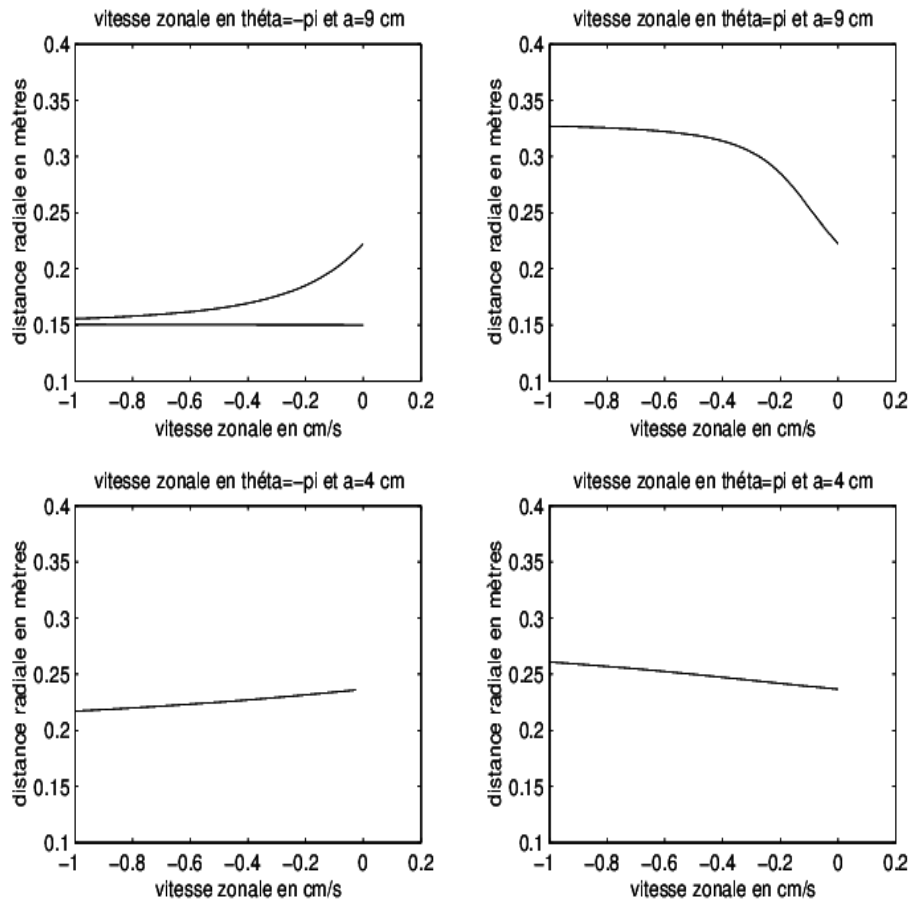


Figure 6: Vitesses calculées précédemment; si l'on ne tient pas compte des grandes valeurs au bord des jets, les résultats pour $a=9$ cm sont relativement proches de la réalité.

Ces vitesses sont dix fois plus rapides que celles observées. Je pense que cela provient de la valeur de a qui a été prise juste égale à la taille de la source. En effet, nous pouvons observer au cours de la manipulation que les zones tourbillonnaires autour des sources sont beaucoup plus grandes, de l'ordre de 9 cm de rayon.

Et si on reprend les calculs avec $a=9$ cm, nous obtenons:

- $r_0=22.3$ cm
- $l_1=11$ cm
- $u_1=0.26$ cm/s
- $l_2=7$ cm
- $u_2=0.38$ cm/s

Bien que les vitesses soient la presque 2 fois trop élevées, nous sommes déjà plus proches de la réalité. En prenant $a=12$ cm, nous obtenons des vitesses compatibles avec les mesures. nécessairement nous devons nous pencher sur ces tourbillons entourant les sources.

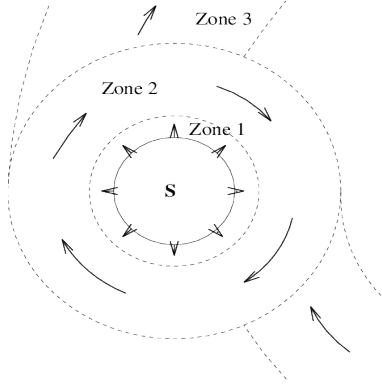
3.7 Problème des sources

Au cours de la description théorique de cette expérience la réalité est biaisée. On suppose en effet que les sources injectent à la surface des vitesses verticales homogènes alors que ce sont des cylindres de mousse placés au fond de la cuve. C'est probablement pour cela que le problème est sous-déterminé. (durant la suite de la section les raisonnements sont applicables aussi bien au puits qu'à la source.)

En fait l'espace ceinturant les sources est plus complexe que cela: Nous pouvons le diviser en 3 zones représentées sur le schéma de la figure (7)

3.7.1 Zone 1

La mousse uniformise les vitesses du fluide qui sort radialement à la surface du cylindre. Ceci implique, par conservation du moment angulaire, que se développe un anticyclone ou un cyclone autour de la source ou du puits, respectivement. C'est au sein de ces zones tourbillonnaires que l'adaptation à la vortacité ambiante doit s'opérer. R. Hide [2] décrit cette couche en détails. Il calcule sa largeur en fonction du débit, de la rotation, de la profondeur et de la viscosité. Elle correspondrait de manière plus précise à



Dans la zone 1, le fluide sort radialement de la mousse et s'adapte à la géostrophie, sa largeur est calculée par R. Hide [2], typiquement de l'ordre de 1 cm. Dans la zone 2, la pente de la surface est trop faible pour briser la symétrie autour de la source, nous avons calculé des extensions de cette zone de 10cm. En dehors, la vorticité reste constante et la circulation est zonale.

Figure 7: Représentation des différentes zones autour de la source (ou du puits).

la couche en $E^{\frac{1}{3}}$ décrite par H.P. Greenspan [1]. Dans le cadre de la première expérience, elle vaut 1.7 cm. Elle est représentée par le cylindre de colorant entourant la source et que l'on retrouve dans toutes les expériences.

3.7.2 Zone 2

A cet endroit, les vitesses sont suffisamment élevées pour que l'on puisse négliger la pente de la surface. Ce qui implique la présence d'une symétrie cylindrique centrée sur la source. Dans la section 4, nous avons étudié un cas de symétrie circulaire et démontré que la solution était à vorticité relative nulle. Tout le transport radial se faisant par les couches d'Ekman et les vitesses dans le repère centré sur la source sont celles du vortex:

$$\begin{cases} u_{I\theta} = -\frac{S}{\pi\delta_e r} \\ u_{Ir} = 0 \end{cases}$$

En supposant l'extension radiale de cette zone assez petite pour que la pente de la surface y soit considérée constante, l'équation de vorticité dimensionnelle générale (7) devient: $\frac{H_0}{2\Omega}(1 + \frac{\Omega^2 d^2}{2gH_0})(\vec{u} \cdot \nabla \zeta - A_h \nabla^2 \zeta) = u_r \frac{\Omega^2 d}{g} - \frac{\delta_e}{2} \zeta$.

Nous pouvons refaire une adimensionnalisation en posant: $U = \frac{S}{\pi\delta_e L}$ qui est l'échelle de vitesse à la distance L de la source. Nous obtenons:

$$\frac{gH_0}{2U\Omega^3 d} \left(1 + \frac{\Omega^2 d^2}{2gH_0}\right) \left(\frac{U^2}{L^2} \vec{u} \cdot \nabla \zeta - \frac{UA_h}{L^3} \nabla^2 \zeta\right) = u_r - \frac{g\delta_e}{2\Omega^2 dL} \zeta$$

La symétrie est cylindrique centrée sur la source si u_r (le terme (3) dû à l'effet β) est négligeable (ici il est d'ordre 1). C'est-à-dire si un autre terme devient grand par rapport à lui. Une étude graphique indique que le terme advectif est de loin le plus important. Si nous supposons que l'extension maximum de la zone 2 est atteinte lorsqu'il est d'ordre 1, nous obtenons la loi:

$$L = \sqrt[3]{\frac{gH_0 S \left(1 + \frac{\Omega^3 d^2}{2gH_0}\right)}{2\Omega^2 d \pi \delta_e}}$$

Nous avons voulu valider cette loi par des mesures expérimentales. la courbe (8) montre que bien que la précision des mesures soit loin d'être excellente, la tendance est tout de mme bien respectée.

3.7.3 zone 3

C'est la zone intérieure o l'équation de vorticité (10) est valable, la hauteur des colonnes ne peut plus varier. Nous devons prendre pour le rayon a de notre source idéale, le rayon L de la zone 2.

De plus, et cela parait très important, nous ne devons pas perdre de vue que la présence de cylindres verticaux jouant le rôle de barrières, bloquent les différents jets et pourraient soutenir des courants de bord ouest.

3.8 Le transport

La question qui vient à l'esprit est: à quoi est due la différence de transport calculé entre les deux jets?

Par construction, le transport de la source au puits vaut globalement S. En posant T_1 le transport issu du jet source-puits et T_2 celui du jet puits-source, nous avons: $T_1 - T_2 = S$. Nous pouvons chercher à quoi est due cette différence: (R est le rayon maximum de la cuve).

$$S = \int_0^R H(r) u_{\theta 1}(r) dr - \int_0^R H(r) u_{\theta 2}(r) dr$$

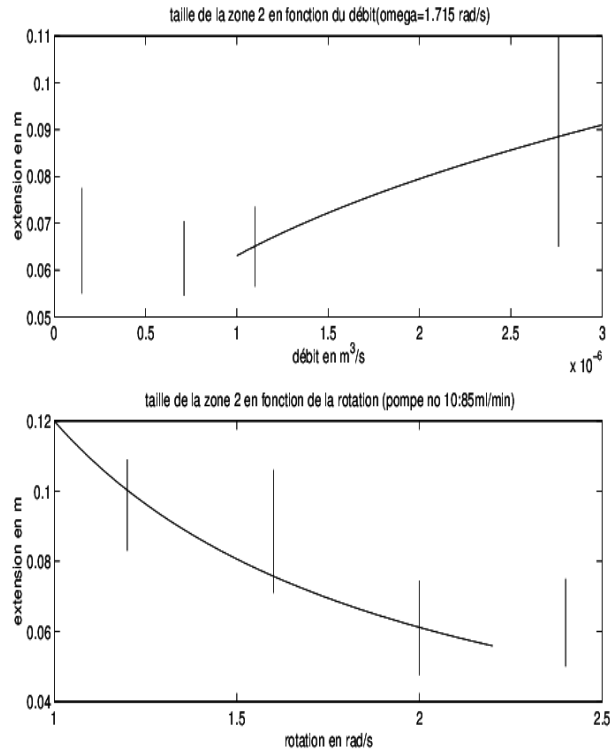


Figure 8: Extension radiale de la zone 2 pour différentes valeurs de débits et de rotation: comparaison avec des résultats expérimentaux.

La source ayant 4cm de rayon, la zone 1 ayant à peu près 2cm de largeur, la zone 2 ne peut pas avoir d'extension inférieure à 6 cm. C'est pour cela que les mesures pour de faibles débits et de fortes rotation (les 2 points les plus à gauche de la courbe du haut et le point à droite de la courbe du bas) sont supérieurs aux prédictions théoriques.

La courbe représente la balance entre l'advection de vorticité due au transport issu de la source et l'effet β dû à la pente de la surface. C'est la limite où la symétrie passe du centre de la source au centre de la cuve.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^R \frac{g}{2\Omega} H(r) \frac{\partial}{\partial r} (\hat{\eta}(r, \frac{\pi}{2}) + \eta_0(r)) dr - \int_0^R \frac{g}{2\Omega} H(r) \frac{\partial \eta_0(r)}{\partial r} dr \\
&= \int_0^R \frac{g}{2\Omega} H(r) \frac{\partial \hat{\eta}(r, \frac{\pi}{2})}{\partial r} dr
\end{aligned}$$

Il est en effet préférable que S ne dépende pas de la valeur arbitraire η_0 . En intégrant par parties, nous obtenons:

$$S = \frac{g}{2\Omega} [H\hat{\eta}]_0^R - \frac{g}{2\Omega} \int_0^R \frac{g}{2\Omega} \frac{\partial H}{\partial r} \hat{\eta} dr$$

Le calcul effectué en 3.4 (équation (15)), montre que $\hat{\eta}(R) = \hat{\eta}(0) = 0$. Le premier terme est nul, la différence de transport est dû à la variation de profondeur. D'ailleurs le deuxième terme vaut:

$$- \int_0^R \frac{\Omega r}{2g} \hat{\eta} dr = - \int_0^R l w_p dr = - \iint_{source} w_p ds = S$$

Ce qui permet de vérifier que la relation (11) conserve bien la masse. Le fait que le transport zonal soit dû à la variation de profondeur conforte la différence fondamentale entre la circulation à profondeur constante décrite par R. Hide [2] et celle que nous avons réalisé.

3.9 Conclusion de la première manipulation

Cette expérience illustre principalement 4 phénomènes intéressant la suite de l'exposé:

1. La circulation géostrophique qui est purement zonale.
2. Les zones anticycloniques et cycloniques autour de la source et du puits. Nous avons pu vérifier la dépendance de leur extension aux valeurs du débit et de la rotation.
3. Nous vérifions aussi la présence des 2 jets zonaux décrits par J.Pedlosky [5]. A la différence près que ici ils vont chacun dans le mme sens. Alors que en présence d'un continent ils sont de directions opposées et situés tous 2 à l'Ouest de la source.
4. Nous observons que ce sont les bords Ouest des sources qui sont utilisés pour les déplacements radiaux.

Ainsi nous avons pu illustrer l'importance fondamentale de l'effet β pour la dynamique de ces expériences. Nous pouvons l'inverser et découvrir les conséquences.

4 Deuxième expérience: le cylindre "équatorial"

4.1 Description

Pour approcher de plus près la dynamique sphérique et en particulier ce qui se passe à l'équateur: doublement net de la profondeur et inversion de β (I. Proudman [6], R. Hide [3], R. Schopp et A. Colin de Verdière [7]), nous utilisons un cône créant une pente du fond d'angle $\alpha = 8^\circ$. Cette topographie combinée à la pente de la surface produit un saut au bout du cône associé à une inversion de β . A la différence de la sphère, comme le montre les courbes de la figure (9), ici "l'équateur est au pôle". En effet, la zone d'inversion de β se situe au minimum de profondeur.

Nous placerons la source au centre du cône pour conserver une symétrie cylindrique et le puits en périphérie. La figure (10) montre l'emplacement des différents éléments ainsi que les valeurs définies au départ de l'expérience.

La rotation a été choisie pour avoir des effets β comparables de part et d'autre du saut. Un doublement de la profondeur à l'extrémité de la topographie aurait été plus proche de la sphère, mais il n'y aurait pas eu dans ce cas assez d'eau au niveau de la source. En fait, l'augmentation de l'épaisseur d'eau n'influence pas significativement les observations. L'objectif de cette manipulation est de comparer les similitudes avec la sphère: transport par les couches d'Ekman et passage du saut à l'équateur par un cylindre équatorial.

4.2 Observations

Au cours de la manipulation, nous pouvons observer que, comme le montre la figure (11):

1. Autour de la source se forme un anticyclone;
2. Le transport radial se fait par la couche d'Ekman de fond;
3. La circulation intérieure est zonale dans le sens négatif (plus rapide au centre);
4. Au bout du cône apparaît une couronne représentant le cylindre équatorial;
5. Un jet zonal de sens négatif se connecte au puits (voir H. Kuo et G. Veronis [9]);

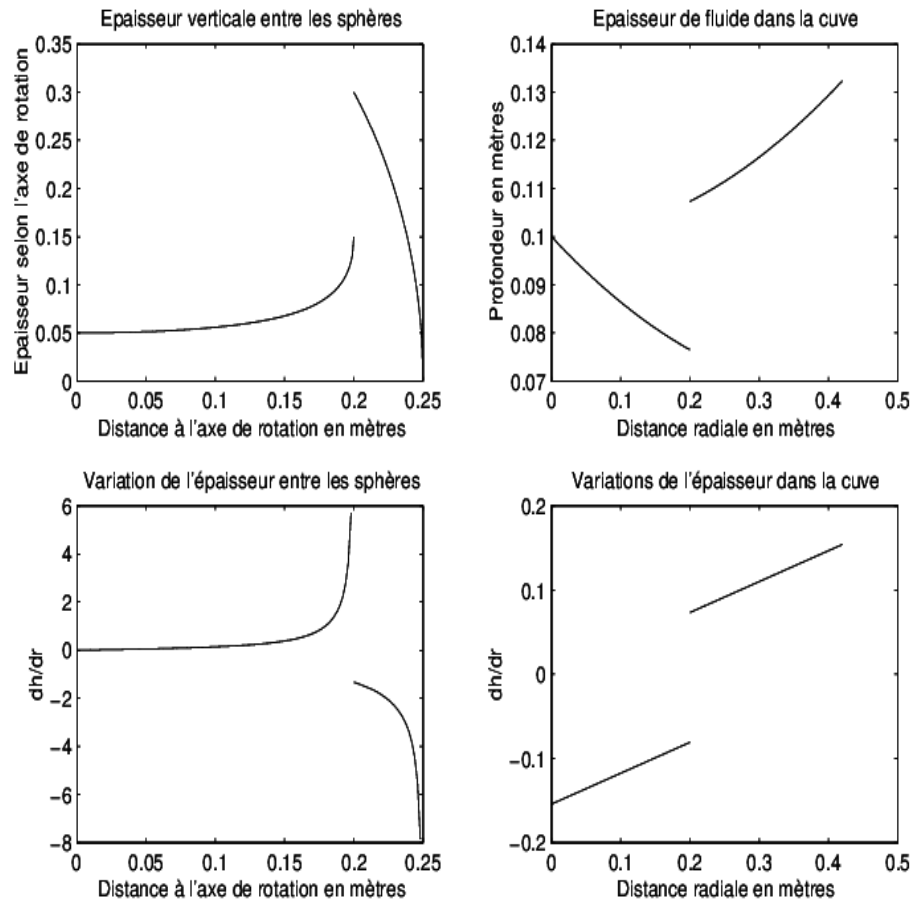
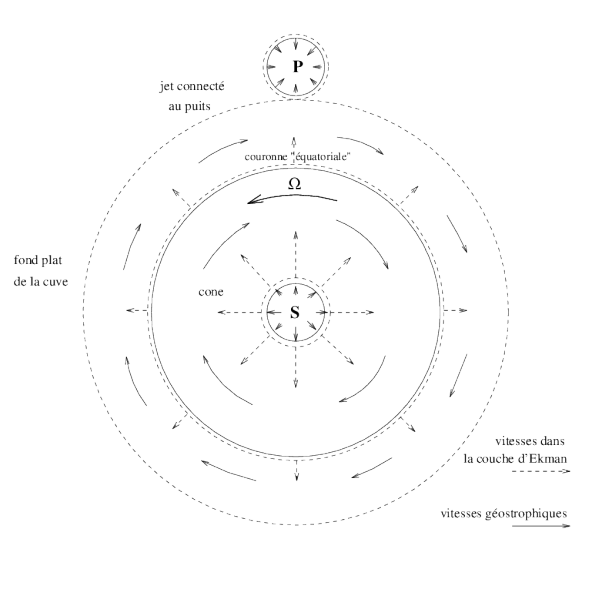


Figure 9: Comparaison des épaisseurs verticales (le long de $\vec{\Omega}$) et des "effets β_{topo} " entre la sphère et la cuve.



Les différents paramètres sont: $\Omega = 1.897 \text{ rad/s}$, $S = 1.417 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, $L = 0.20 \text{ m}$ rayon du cône, $\alpha = 8^\circ 8$ pente du cône, $H_d = 0.1 \text{ m}$

Figure 10: Schéma (vu du dessus de la cuve) de la deuxième expérience.

coller ici la photo

Figure 11: Vision générale de la deuxième expérience.
On remarque la symétrie cylindrique de la circulation, le transport par les couches de fond et la couronne à l'extrémité du cône.

4.3 Analyse théorique

De manière générale, mais surtout sur le cône, la symétrie est cylindrique (à l'extérieur, le puits brise un peu cette symétrie). Donc toutes les fonctions ne dépendent que du rayon. Si nous posons ψ une fonction courant, comme hors des couches limites en $E^{\frac{1}{3}}$ les mouvements sont bidimensionnels, $\nabla_H \cdot \vec{u} = 0$, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \tag{21}$$

Les nombres caractéristiques de l'expérience sont:

- $\epsilon = 2.10^{-3}$
- $R_e = 300$
- $\delta_e = 7.10^{-4}$

Comme $\psi = \psi(r) \rightarrow u_r = 0$, (9) devient:

$$\epsilon \left(1 + \frac{F}{8} r^2 - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0} r\right) \left(-\frac{1}{R_e} \nabla^4 \psi\right) = -\frac{\delta_e}{2H_0} \nabla^2 \psi \tag{22}$$

$$\frac{\epsilon}{R_e} (\simeq 7.10^{-6}) \ll \frac{\delta_e}{2H_0} (\simeq 4.10^{-3}) \rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \tag{23}$$

Aucun pompage ne provient de la couche de fond qui, par conséquent est non divergente. La solution intérieure est à vorticité nulle, c'est le vortex:

$$\begin{aligned} u_{Ir} &= 0 \\ u_{I\theta} &= \frac{A}{r} \end{aligned} \tag{24}$$

En conclusion, tout le transport radial se fait par la couche d'Ekman de fond

4.4 Analyse quantitative

J'attire l'attention sur le fait que lorsque dans la suite de l'exposé on traite la couche d'Ekman, on néglige la pente du fond. Ce cas est développé dans le livre de J.Pedlosky [4]. Mais ici la pente est assez faible pour que les valeurs (l'épaisseur de la couche par exemple) soient valides à moins de 10% près.

4.4.1 Mesure indirecte de A_v

La valeur de la vitesse zonale intérieure dépend du transport radial au sein la couche d'Ekman. Nous pouvons espérer que en mesurant cette vitesse zonale nous obtiendrons une valeur de δ_e et par conséquent de A_v .

La conservation du transport radial implique: (pour la suite de la section nous ometterons les astérisques en écrivant les variables qui sont toutes dimensionnelles.)

$$S = 2\pi r \int_H u_r dz$$

Or nous avons obtenu précédemment que les vitesses géostrophiques radiales sont nulles. u_r est égale à u_{Br} , vitesse radiale dans la couche de fond. Une analyse de cette couche nous donne:

$$u_{Br} = -u_{I\theta} e^{-\frac{z}{\delta_e}} \sin\left(\frac{z}{\delta_e}\right) \quad (25)$$

o $\delta_e = \sqrt{\frac{A_v}{\Omega}}$ et $u_{I\theta} = \frac{A}{r}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S &= -2\pi A \int_H e^{-\frac{z}{\delta_e}} \sin\left(\frac{z}{\delta_e}\right) dz \\ &= \pi A \delta_e \text{Im}[(i+1)(e^{(i-1)\frac{H}{\delta_e}} - 1)] \end{aligned}$$

$e^{-\frac{H}{\delta_e}} \sim 10^{-60}$ donc $S = -\pi A \delta_e$. Alors,

$$u_{I\theta} = -\frac{S}{\pi \delta_e r} \quad (26)$$

Une mesure de $u_{I\theta}$ nous donne δ_e et par conséquent A_v .

En posant T_n le temps que met une particule située hors des couches limites pour effectuer n tours autour de la source, nous avons: $T_n |u_{I\theta}| = 2\pi r n$. Ce qui entraîne:

$$A_v = \left(\frac{T_n S}{2\pi^2 r^2 n}\right)^2 \Omega \quad (27)$$

et,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta A_v}{A_v} &= \frac{\Delta\Omega}{\Omega} + 2\frac{\Delta T_n}{T_n} + 2\frac{\Delta S}{S} + 4\frac{\Delta r}{r} \\ &\simeq 4\frac{\Delta r}{r}\end{aligned}$$

Nous pouvons mesurer $u_{I\theta}$ en suivant une tache de colorant. Attention, la couche d'Ekman étant non divergente, le fluide issu de la source n'infeste pas l'intérieur. Pour mesurer $u_{I\theta}$, nous devons injecter le colorant par des trous pratiqués dans le couvercle de la cuve. Nous obtenons par cette méthode:

distance radiale en cm	temps T_1 en s	diffusion verticale A_v en m^2/s	ΔA_v en m^2/s
24 ± 0.3	473 ± 1	$6.6 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$
8.8 ± 0.3	110 ± 1	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$
15 ± 0.5	240 ± 2	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$

Les vitesses sont plus fortes au centre de la cuve. A_v étant une diffusion (légèrement) turbulente, il est compréhensible qu'elle soit plus grande là où le fluide est plus rapide. De plus, nous avons négligé la pente du cône, ce qui peut perturber les résultats. Mais la troisième ligne a été obtenue au cours d'une expérience similaire sur un fond plat. Le fait qu'elle s'insère entre les 2 autres, valide l'approximation.

4.4.2 Calcul de l'extension de la tache de colorant

Nous observons très nettement au cours de l'expérience, le colorant se répandre régulièrement dans la couche d'Ekman. Nous pouvons calculer son extension au cours du temps grâce à u_{Br} et comparer le résultat à l'expérience. On constate que le terme en sinus annule u_{Br} (équation (25)) en $z = \pi\delta_e$. Nous supposons que la tache que nous observons s'étend à une vitesse moyenne $u_{\bar{Br}}$ sur cette épaisseur $\Delta = \pi\delta_e$. $u_{\bar{Br}}$ vaut: $u_{\bar{Br}} = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta e^{-\frac{z}{\delta_e}} \sin\left(\frac{z}{\delta_e}\right) \frac{S}{2\pi r} dz$. Donc, $u_{Br} = \frac{S}{2\pi^2 r \delta_e} (1 + e^{-\pi})$. Soit r , l'extension radiale de la tache de colorant à un instant t . On a: $\frac{dr}{dt} = u_{\bar{Br}} = \frac{B}{r}$, où $B = \frac{S(1+e^{-\pi})}{2\pi^2 \delta_e}$. Nous avons l'équation différentielle: $2r \frac{dr}{dt} = 2B = \frac{dr^2}{dt}$. En intégrant nous obtenons:

$$r = \sqrt{2Bt + r_0^2} \quad (28)$$

qui peut être comparé aux résultats expérimentaux.

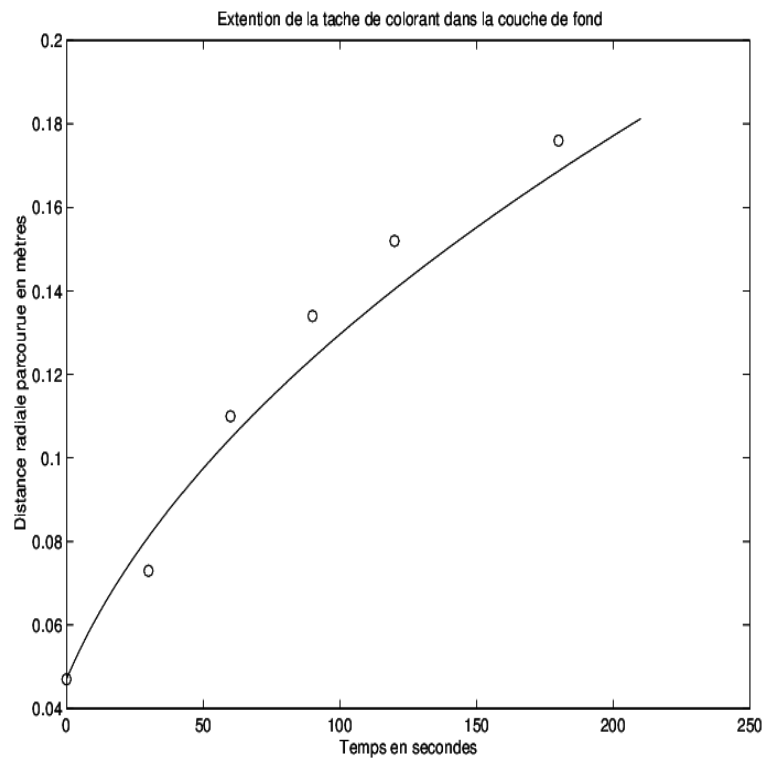


Figure 12: Extention de la tache de colorant sur le fond du cône, comparaison avec les mesures.

t en s	0	30	60	90	120	180
r mesuré en m	0.047	0.073	0.110	0.134	0.152	0.176
r calculé en m	r_0	0.081	0.105	0.124	0.140	0.169

La courbe (12) montre que bien que la technique de mesure soit plutôt primaire (chronométrage et suivi de la tache de colorant sur un écran vidéo), nous obtenons des résultats en accord avec la théorie.

4.5 Etude de la couche limite sur le pourtour du cône

Le schéma (13) montre les différentes couches que l'on croise au niveau du saut. Celles de largeurs l_1 et l_2 sont dues à la condition de non glissement au bord, celle en $E^{1/3}$ permet d'avoir des vitesses verticales sur la marche.

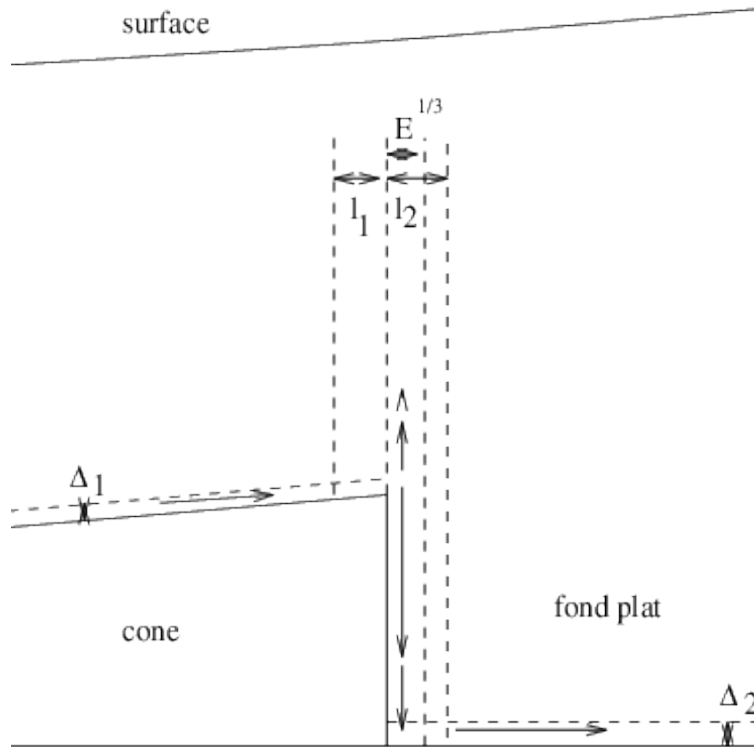


Figure 13: Les différentes couches limites à l'extrémité du cône.

Pour calculer la largeur de la couronne bordant le cône, je me suis inspiré du travail de J.Pedlosky [4] portant sur les surfaces latérales. J'ai supposé que le saut au bout du cône était comparable à un mur qui laisserait

passer le transport radial. Ce mur peut-être justifié par la condition de non-glissement au niveau du saut. H.P. Greenspan [1] démontre qu'une couche limite en $E^{\frac{1}{4}}$ est nécessaire pour respecter cette condition et qu'une autre couche en $E^{\frac{1}{3}}$ existe à l'intérieur pour autoriser les vitesses verticales. La symétrie étant respectée, nous avons toujours l'équation (22): $\epsilon(1 + \frac{F}{8}r^2 - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0}r)(-\frac{1}{Re}\nabla^4\psi) = -\frac{\delta_e}{2H_0}\nabla^2\psi$. Posons, $B = 1 + \frac{F}{8}r^2 - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0}r$, l : largeur adimensionnelle de la couche limite, $\xi = \frac{1-r}{l}$ la coordonnée radiale compressée au niveau de la couche limite, ψ_I la fonction courant intérieure et $\hat{\psi}$ la correction couche limite de cette fonction.

On a: $\psi = \psi_I + \hat{\psi}$.

ψ_I est solution de $\nabla^2\psi = 0$ donc de (22). $\hat{\psi}$ est solution de:

$$C\nabla^4\hat{\psi} = \nabla^2\hat{\psi} \quad (29)$$

$$O, C = \frac{2H_0\epsilon B}{\delta_e Re} = B \frac{E_h}{E_v^{\frac{1}{2}}}$$

Passage en coordonnées ξ : $r = 1 - \xi l$, $\nabla^2 = \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{lr}\frac{\partial}{\partial \xi}$ donc (29) devient:

$$\frac{C}{l^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{l}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{l}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\hat{\psi} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{l}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\hat{\psi}$$

si $l \ll 1$, $B = 1 + \frac{F}{8} - \frac{L \tan(\alpha)}{H_0}$ et, $\frac{C}{l^2}\frac{\partial^4}{\partial \xi^4}\hat{\psi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\hat{\psi}$. Donc C doit être

du même ordre que l^2 . C'est à dire, $l \sim \sqrt{C} = \sqrt{B}\frac{E_h^{\frac{1}{2}}}{E_v^{\frac{1}{4}}}$. Si nous supposons que seule la diffusion moléculaire ν intervient dans les termes frictionnels, $A_v = A_h = \nu$, alors,

$$l = \frac{\sqrt{B\delta_e H}}{L}$$

Ainsi, la largeur dimensionnelle de la couche limite sera:

$$l^* = \sqrt{B\delta_e H} \quad (30)$$

Sur le cône, $\sqrt{B} < 1$, de se fait la pente du fond diminue la largeur de la couche. Numériquement:

- $l_{interieur}^* \simeq 0.6$ cm
- $l_{exterieur}^* \simeq 0.8$ cm

- $\Delta = l_{interieur}^* + l_{exterieur}^* \simeq 1.5 \text{ cm}$

Le fait que l'on doit avoir des vitesses verticales au bord du cône pour respecter le transport par le fond, amène à penser que la couronne colorée autour du saut doit tre une couche en $E^{\frac{1}{3}}$, Ce qui donne:

$$l^* = L\left(\frac{\nu}{\Omega L^2}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 0.5 \text{ cm} \quad (31)$$

La longueur l^* donnée par l'équation (31), permet de résoudre (30) en posant comme conditions aux limites:

- $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \hat{\psi} = 0$ (raccordement à la circulation intérieur pour $r < 1$)
- $\lim_{\xi \rightarrow 0} \hat{\psi} = -\psi_I$ (condition de non glissement au bord)

Cette solution est calculée dans le livre de J.Pedlosky [4].

coller ici la photo

Figure 14: Visualisation de la couronne équatoriale.

Sur la photo de la figure (14), nous observons très nettement la couche de 0.5 cm de largeur autorisant les mouvements verticaux sur le pourtour du cône. Par contre, les autres couches ont été indécélables (peut tre la couronne plus claire ceinturant l'intérieur du cône que l'on voit sur la figure (11)).

4.6 Conclusion de la deuxième manipulation

Cette expérience, qui a été la plus nette de toutes, nous a permis d'observer:

- Le transport purement d'Ekman sur le cône et après le cône.
- La couche en $E^{\frac{1}{3}}$ ceinturant le cône

De plus, il a été possible grâce aux vitesses zonales (en $\frac{A}{r}$ et inobservables sans ajout de colorant), de mesurer la diffusion verticale A_v .

Pour pouvoir comparer ces résultats avec les expériences sphériques, il ne faut pas oublier que dans le cadre des sphères,

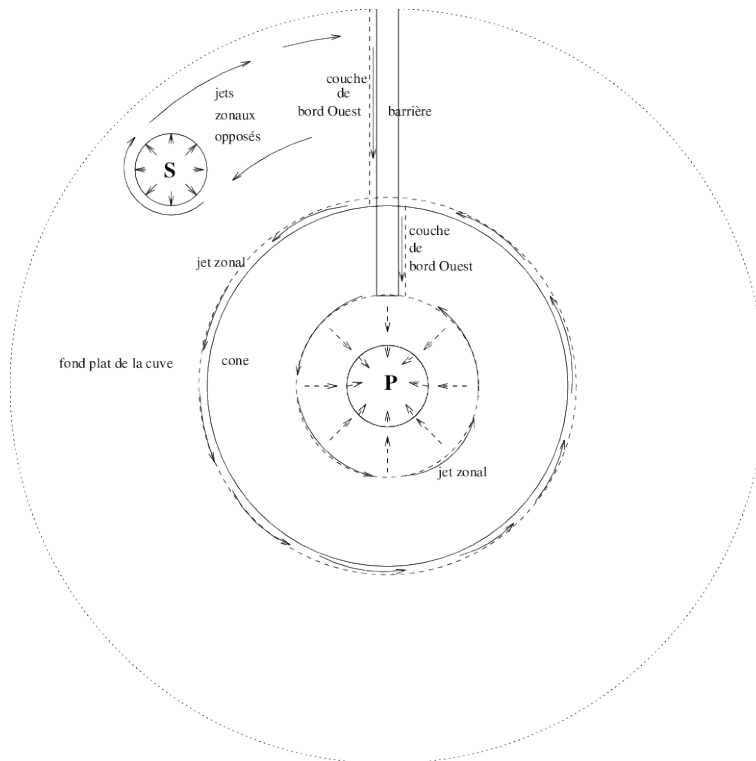
- Le fluide est compris entre 2 couches frictionnelles
- La pente de ces couches n'est plus négligeable

Malgré tout, nous avons une vision qualitative de la circulation. Nous pouvons rajouter un "continent".

5 Troisième expérience: inversion de β et frontières

5.1 Description

Nous voulons désormais observer le rôle de l'inversion de β associée à une circulation cadrée par un continent. Nous installons une barrière sur le petit cône. Sa taille et sa position étant choisies de manière à coller le plus près possible à l'expérience sphérique. La figure (15) montre la position des éléments dans la cuve, les valeurs que nous fixons au départ et les grandes lignes de la circulation. La frontière permet le développement de couches limites de bord Ouest de type Stommel, Charney ou encore Munk. Elles sont entièrement liées à β . C'est en effet son signe comparé à celui de la rotation (choix de l'hémisphère), qui donne la direction de l'Ouest sur la terre. Donc, si β s'inverse sans que l'on change d'hémisphère,



Les différents paramètres sont: $\Omega = 1.897 \text{ rad/s}$, $S = 1.417 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, $L = 0.20 \text{ m}$ rayon du cône, $\alpha = 8^\circ 8$ pente du cône, $H_d = 0.1 \text{ m}$

Figure 15: Schéma (vu du dessus de la cuve) de la troisième expérience.

coller ici la photo

Cette photo, prise quelques minutes après l'injection de colorant, montre les jets dipolaires connectés à la source et l'utilisation du bord Ouest pour les mouvements radiaux. Le courant de bord se détache de la frontière quelques centimètres avant le saut équatorial. Cela serait peut-être dû à la présence d'un courant contraire descendant du cône. Nous pouvons voir aussi que le colorant effectuant la révolution le long de la topographie envahit peu à peu le cône.

Figure 16: Vision générale de la troisième expérience.

le bord Ouest passe à l'Est

D'o le décollement du bord observé sur la photo de la figure (16). Les expériences avec continent garderons, pour tre comparables, les mmes valeurs de rotation, débit, ou profondeur que celles sans barrières.

5.2 Observations, comparaisons

5.2.1 Au niveau de la source

A l'Ouest de la source, nous observons 2 jets opposés, connectés à son anti-cyclone. Nous les observons sur la figure (16): le jet proche de la paroi de la cuve va vers barrière, l'autre revient vers la source. Ceci est conforme aux résultats de la première expérience et à l'analyse effectuée par J.Pedlosky [5].

En effet, on ne peut développer de gradient de pression sur le bord Est de la frontière. Donc, à l'Est de la source, nous pouvons poser: $\eta_{Est} = \eta_0 = 0$. Ensuite, à l'Ouest, (13) nous donne:

$$\eta_{Ouest} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2wg^2}{\Omega} d\theta$$

Donc à l'Ouest de la source, $\eta \neq 0$ (> 0 car c'est une zone anticyclonique). Hors des distances au centre englobant la zone tourbillonnaire "source", la surpression doit tre continue. C'est à dire $\eta = \eta_{Est} = 0$. Alors η_{Ouest} doit tre nul jusqu'à un certain rayon r_1 correspondant à la partie intérieure de la zone "source", croître, puis décroître pour tre de nouveau nul en r_2 correspondant à la partie extérieure. Donc la source développe bien 2 jets de sens opposés. Ce qui est cohérent avec les résultats de vitesses $\hat{u}(r)$ calculés en 3.4.

Pour pouvoir connaître $\hat{u}(r)$ nous devons tout d'abord calculer a qui est la largeur de la source idéalisée et qui est ici le rayon de la zone 2 étudiée en 3.2.2.

5.2.2 Résultats théoriques et mesures

Les résultats obtenus lors de la première expérience nous donnent, dans le cas présent, pour une distance d de la source au centre=32 cm et les autres valeurs citées au-dessus: $r_0 = 31.5cm$, $a = 5.5cm$, $l_1 = 6cm$, $l_2 = 5cm$, $\bar{u}_1 = 0.24cm/s$, $\bar{u}_2 = 0.28cm/s$ Les mesures grâce à la vidéo nous donnent: $r_0 = 31cm$, $a = 6cm$, $l_1 = 5cm$, $l_2 = 4cm$, $\bar{u}_1 = 0.12cm/s$, $\bar{u}_2 = 0.15cm/s$

De mme que pour la première expérience, seules les vitesses n’ont pas une bonne corrélation mesure/théorie (le calcul donne toujours des vitesses 2 fois trop fortes).

5.2.3 Le long de la frontière

Sur la partie extérieure au cône, le fluide utilise la partie Ouest (ici à gauche de la frontière) pour se déplacer radialement. Nous avons très nettement un courant de bord Ouest tel qu’il est décrit par H. Stommel, A.B. Arons et A.J. Faller [8] (voir figure(16)). Nous pouvons , grâce à la vidéo, mesurer les vitesses moyennes et la largeur de la couche. Nous pouvons comparer le transport ainsi calculé avec le débit de la source

- vitesse dans la couche: $\bar{u}_c \sim 0.1cm/s$
- largeur de la couche: $\delta = 4cm$
- transport: $T \simeq \bar{u}_c \delta H \sim 3.8.10^{-6}m^3/s$

En utilisant les mesures précédentes, $T_1 \simeq \bar{u}_1 l_1 H \simeq 5.7.10^{-6}m^3/s$. Ce qui montre le manque de précision dans les mesures de vitesses. De plus, si la mesure du transport sur la frontière se fait en amont du jet retour: $T = T_1$, alors que si la mesure ce fait en aval: $T = S$. Comme la mesure de la vitesse se fait sur une moyenne assez large, T devrait plutôt tre comparé à $\frac{T_1+S}{2} \simeq 3.10^{-6}m^3/s$.

Nous pouvons aussi constater un phénomène de recirculation à la jonction continent-cône. D’ailleurs nous remarquons que le fluide se décolle de la frontière légèrement avant cette jonction. Il est possible, mais c’est juste une hypothèse, que cela soit dû à la rencontre avec un courant contraire provenant du jet zonal passant à l’extrémité du continent et virant sur sa droite par l’influence de la force de Coriolis.

5.2.4 Sur le pourtour du cône

A la limite du cône, le fluide pour continuer à se déplacer radialement vers la source, va devoir chercher l’autre bord Ouest (sur le cône). Il doit effectuer le tour complet le long de la zone d’inversion de β . Durant toute cette révolution, il va subir le frottement latéral du bord de la topographie et le frottement de fond. C’est pourquoi Il envahit peu à peu le cône (Les imperfections du cône doivent avoir un rôle aussi). Ce que l’on distingue sur la figure (16). Malgré cela, il atteint le second bord Ouest (situé cette fois-ci à droite de la barrière) et développe de nouveau un courant de bord.

5.2.5 A l'extrémité de la frontière

Nous observons une circulation zonale, identique à celle de la deuxième expérience, mais de sens inverse, le puits étant au centre.

Par contre, nous avons remarqué que le jet directement issu du continent virait sur la droite et longeait le bord Est pour sortir du cône. Il apparaît aussi un phénomène d'instabilité au bout de la barrière.

Il est possible que la barrière ait amplifié une pulsation perturbatrice qui, je pense, viendrait de la table. En effet nous avons observé au cours de cette manipulation des oscillations dans la circulation à la période de la table (1 coup/tour). Bien que nous ayons tout tenté pour endiguer ce bruit, il est resté présent. Il reste deux possibilités:

- La pulsation vient d'un point dur dans la rotation de la table et est amplifiée par la présence du continent. Ceci peut devenir gênant pour des expériences demandant une certaine précision. Le branchement d'un oscilloscope sur le contrôleur pourrait vérifier cette hypothèse.
- L'instabilité développée au bout du continent perturberait toute la circulation. Il peut sembler surprenant que sa pulsation soit exactement celle de la table.

Cela dit, Nous observons des ondes qui se propagent zonalement vers l'Ouest. Elles se créent au bout de la frontière et viennent buter contre le bord Ouest.

Nous mesurons la longueur d'onde: $\lambda \simeq 19cm$ et la période $T=34s$, ce qui entraîne: $\omega = 0.1848rad/s$.

5.2.6 Relation de dispersion

L'équation (6) peut se réécrire en négligeant les termes non linéaires:

$$\frac{H_0}{2\Omega} \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2gH_0} - \frac{r \tan(\alpha)}{H_0} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_r \left(\frac{\Omega^2 r}{g} - \tan(\alpha) \right)$$

En posant:

$$G = \frac{H_0}{2\Omega} \left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{2gH_0} - \frac{r \tan(\alpha)}{H_0} \right)$$

et

$$H = u_r \left(\frac{\Omega^2 r}{g} - \tan(\alpha) \right)$$

et en réintroduisant ψ , la fonction courant, nous obtenons:

$$G \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\frac{H}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (32)$$

Cherchons une solution sous forme d'une onde plane:

$$\psi = \psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \psi_0 e^{i(k_r r + k_\theta (r\theta) - \omega t)}$$

L'équation (32) devient:

$$G\omega k^2 = -Hk_\theta \quad (33)$$

qui est la relation de dispersion d'une onde de Rossby linéaire.

Si l'onde est purement zonale, cette relation devient:

$$\omega = -\frac{H}{Gk_\theta} = -\frac{H\lambda}{2\pi G} \quad (34)$$

Pour $r=0.1m$, en introduisant $\omega = 0.1848rad/s$, nous obtenons $\lambda = 22.5cm$, ce qui est proche de la mesure. L'onde produite est bien une onde de Rossby.

On peut supposer que cette onde est due à une instabilité produite par le cisaillement de courant au bout de la frontière. En effet dans la zone entre la frontière et la source, la configuration est identique à la deuxième expérience. Nous avons la mme circulation zonale en $\frac{A}{r}$ dans le sens opposé car, cette fois, c'est le puits qui est au centre. Connaissant l'échelle radiale de cisaillement qui peut tre donnée par la condition de non glissement en $E^{\frac{1}{4}}$ à l'extrémité de la barrière et l'échelle de vitesse, on peut vérifier la possibilité de développer une instabilité barotrope.

5.3 Type de couche limite le long de la frontière

Il peut tre intéressant de savoir si la manipulation favorise tel ou tel type de couche limite. Nous reprendrons l'équation (8) en utilisant la correction B vue plus haut:

$$\frac{H_0 B}{2\Omega} \left(\frac{U^2}{L^2} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \zeta - \frac{A_h U}{L^3} \nabla^2 \zeta \right) = U u_r \left(\frac{\Omega^2 L}{g} r - \tan(\alpha) \right) - \frac{\delta_e U}{2L} \zeta$$

En faisant ressortir la vitesse radiale:

$$r u_r \left(1 - \frac{g \tan(\alpha)}{\Omega^2 L r} \right) = \frac{H_0 g B}{\Omega^3} \left(\frac{U}{L^3} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \zeta - \frac{A_h}{L^4} \nabla^2 \zeta \right) + \frac{\delta_e g}{2\Omega^2 L^2} \zeta$$

En réintroduisant ψ en en posant $D = 1 - \frac{g \tan(\alpha)}{\Omega^2 L r}$ qui est d'ordre 1, nous obtenons:

$$D \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\delta_C^3}{L^3} J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{\delta_M^4}{L^4} \nabla^4 \psi - \frac{\delta_S^2}{L^2} \nabla^2 \psi \quad (35)$$

o,

- $\delta_C = \sqrt[3]{\frac{H_0 g B U}{2 \Omega^3}}$ largeur dimensionnelle de la couche limite de Charney;
- $\delta_M = \sqrt[4]{\frac{H_0 g B A_h}{2 \Omega^3}}$ largeur de celle de Munk;
- $\delta_S = \sqrt{\frac{\delta_e g}{2 \Omega^2}}$ largeur de celle de Stommel;

Nous obtenons en $r=1$ (c'est-à-dire en $r^*=0.2$ m),

- $\delta_S = 3.1 \text{ cm}$
- $\delta_M = 1.5 \text{ cm}$
- $\delta_C = 4.3 \text{ cm}$

Ces largeurs comme on pouvait s'y attendre, sont du mme ordre de grandeur. En moyenne, $\bar{\delta} \simeq 3 \text{ cm}$. C'est ce que l'on peut observer au cours de l'expérience. Et aucune couche n'est prépondérante par rapport aux autres.

5.4 Autour du puits

Dans la zone non fermée par le continent, la symétrie redevient cylindrique et la circulation reste comparable à la deuxième au signe près (cette fois c'est le puits qui est au centre).

5.5 Conclusion de la troisième expérience

Malgré les enseignements issus des premières manipulations, cette expérience est restée la plus difficile à décrire. Nous avons toujours,

- La zone 2 tourbillonnaire autour de la source
- La circulation dipolaire qui s'y connecte

- La symétrie cylindrique au centre qui nécessite un transport par les couches d'Ekman et une circulation zonale en $\frac{A}{r}$

La présence du continent à de plus apporté plusieurs bouleversements:

- Une circulation radiale a pu suivre les bords Ouest
- La permutation de l'effet β à montré très nettement la permutation de ces bords Ouest
- Le cisaillement au bout de la frontière à permis à une onde de Rossby de se développer
- La présence de la barrière à, de plus, mis en valeur un défaut possible dans la table

Nous allons pouvoir vérifier si l'on observe les mmes phénomènes dans le cadre de la circulation produite entre 2 sphères concentriques au sein desquelles nous avons placé une barrière.

6 Dernière expérience: circulation entre 2 sphères concentriques avec frontières

Dans cette partie, nous comparons de manière qualitative les résultats obtenus lors des manipulations en cuve carrée et les observations dans le cadre de la sphère.

6.1 Description

- La sphère intérieure à 20 cm de rayon.
- Celle extérieure à 25 cm de rayon.
- Nous plaons tout d'abord une barrière verticale, étanche sur toute l'épaisseur et allant du pôle Nord à 45° Sud.
- La source est située à 75° Nord et à 90° de longitude à l'Est du continent.
- Le puits est situé au pôle Sud.
- La rotation est fixée à $\Omega = 3s/tour = 2.094rad/s$.
- Le débit de la source varie de 21 à 1200 ml/min.

6.2 Comparaison avec les expériences en cuve plane

6.2.1 La source

coller ici la photo

Figure 17: visualisation de la zone cylindrique (zone 2) centrée sur la source, elles sera toujours très grande mme pour des débits très faibles.

La figure (17) nous montre une largeur de la zone anticyclonique centrée sur la source particulièrement grande comparé au débit qui vaut 21ml/min. Ceci provient de la faiblesse de l'effet de pente dans les hautes latitudes. Nous retrouvons les résultats de la première expérience. De cette zone, ce connecte à l'Ouest comme précédemment les 2 jets assurant le transport vers la barrière. Les débits devront donc rester faibles

6.2.2 Le bord Ouest

La figure (18) indique très nettement l'utilisation du bord Ouest pour le déplacement radial. Au niveau du trait de marqueur noir, nous arrivons dans la zone équatoriale: inversion de β et doublement de la profondeur.

coller ici la photo

Figure 18: Le fluide utilise le bord Ouest pour se mouvoir radialement. Le trait noir de marqueur, en haut à gauche, indique la limite de la zone équatoriale, à l'intérieur de laquelle nous distinguons le courant décoller du bord Ouest.

6.2.3 La zone équatoriale

En regardant très attentivement la figure (18), Nous pouvons distinguer que dans la zone équatoriale (à gauche du trait noir), le fluide s'est décollé de la barrière: le bord Ouest est passé à l'Est. Nous retrouvons assez nettement les résultats de la cuve carrée.

coller ici la photo

Figure 19: Un jet zonal fait le tour de la sphère au niveau de la zone équatoriale.

Nous observons deux jets au niveau du saut à l'équateur, l'un dans l'hémisphère Nord, l'autre au Sud. Celui du Sud semble moins rapide. Sur la figure (19), on observe sur le pourtour de la sphère le jet équatorial (Nord). Il est peut-être dû à la circulation liée à un transport d'Ekman vers le Sud. C'est en effet à ce niveau là, le seul transport Nord-Sud envisageable.

6.2.4 Au bout de la frontière

Au dessous du continent, la circulation est zonale et le transport vers le puits se fait par les 2 couches frictionnelles, comme s'il n'y avait pas de barrière.

Ce qui correspond encore aux expériences de la cuve carrée.

6.3 Conclusion de l'expérience sphérique

Bien que les conditions aux limites soient radicalement différentes de celles de la cuve carrée (par exemple la pente n'est plus négligeable pour les couches d'Ekman qui sont ici au fond et en surface), nous observons plusieurs similitudes:

- Zone anticyclonique autour de la source
- Utilisation du bord Ouest
- Renversement de ce bord dans la zone équatoriale
- Circulation zonale quand, hors du continent, la symétrie devient cylindrique

Mais certains phénomènes restent spécifiques à la sphère:

- Le fluide est coincé entre 2 couches frictionnelles
- Il peut alors avoir des vitesses verticales entre ces couches
- Leurs pentes ne sont plus négligeables
- Le bord Est dans la zone équatoriale n'est pas franchement utilisé

Il est impératif de continuer à travailler sur la sphère.

7 Conclusion

Au cours de ce stage, nous avons voulu approcher progressivement la dynamique du passage à l'équateur (inversion de β et saut au niveau du cylindre équatorial) par des manipulations en cuve carrée: La première expérience (fond plat et effet β dû à la pente de la surface), axée sur les sources, a révélé la présence d'une zone les entourant où l'advection de vorticité compense l'effet β . Elle a autorisé aussi la mesure de la largeur des jets zonaux s'y connectant et leurs vitesses. La deuxième (cône et pente de surface), plus proche de la sphère en simulant l' quateur par un saut et une inversion de β , a montré: Le transport radial par le fond, la couronne équatoriale et la circulation zonale intérieure en $\frac{A}{r}$ quand la symétrie est cylindrique. L'influence du continent a été particulièrement nette lors de la troisième manipulation

de même que l'inversion du bord Ouest avec β . Globalement, nous retrouvons ces résultats lors des expériences entre les sphères. Les observations étant plus faciles dans une cuve carrée, nous avons pu mieux comprendre les différentes étapes de la circulation. Par contre, l'utilisation du bord Est dans la zone équatoriale de la sphère n'a pas été franchement observée. Ces expériences nous ont aussi révélé des phénomènes inattendus: la circulation vers l'Ouest et l'utilisation du bord Ouest des sources dans la première manipulation, la possibilité de mesurer la diffusion verticale dans la deuxième, l'onde générée lors de la troisième. Ces manipulations peuvent approcher de manière assez originale les spécificités du passage à l'équateur. Bien sûr les échelles sont loin d'être respectées, mais cela ouvre de larges champs à la compréhension de nouveaux processus physiques.

Est-il encore raisonnable à l'époque du tout numérique de réaliser des expériences sur table? La richesse des phénomènes développés implique l'affirmative. Ils sont parfois assez incompréhensibles, souvent inquantifiables, mais ils existent par définition physiquement. C'est pour cela que la table tournante est et restera un outil fondamental pour comprendre la dynamique des fluides.

8 Références bibliographiques

1. Greenspan, H.P., 1968: *The theory of rotating fluids*, Cambridge University Press.
2. Hide, R., 1968: On source-sink flows in a rotating fluid, *J. Fluid. Mech.*, **32**, 737-764.
3. Hide, R., 1977: Experiments with rotating fluids, *Quart. J. R. Met. Soc.*, **103**, 1-28.
4. Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag
5. Pedlosky, J., 1997: *Ocean Circulation Theory*, Springer-Verlag
6. Proudman, I., 1956: The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. of Fluid. Mech.*, **1**, 505-516.
7. Schopp, R. et Colin de Verdière, A., 1994: Taylor Columns between two concentric spheres. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.*
8. Stommel, H., Arons, A. B. et Faller A.J., 1958: Some Examples of Stationary Planetary Flow Patterns in Bounded Basins, *Tellus*, **10**, 179-187.

9. Kuo, H. et Veronis, G., 1971: The source-sink flows in a rotating system and its oceanic analogy, *J. Fluid. Mech.*, **45**, 441-464.